
Modélisation instrumentée et conceptions a priori dans un espace de travail géométrique en évolution

Une excursion en géométrie dynamique tridimensionnelle

Mathieu Blossier*, Philippe R. Richard**

** Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Rouen
Avenue de Broglie B.P. 138
76821 Mont-Saint-Aignan
mathieu.blossier@ac-rouen.fr*

*** Université de Montréal et Universitat Autònoma de Barcelona
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
philippe.r.richard@umontreal.ca*

RÉSUMÉ. Joint à une évolution technologique en effervescence, les nouvelles possibilités de représentation des phénomènes de l'espace et des formes permettent de simuler des situations difficiles d'accès au quotidien ou dont la manifestation demeure éphémère. Afin de soutenir le développement d'une compétence de modélisation chez l'élève de la fin du collège au début du lycée, nous posons deux situations-problèmes à l'aide du logiciel géogébra 3D. Le premier problème, dit du lampadaire, repose sur une situation d'optimisation géométrique qui se traite conjointement en deux et en trois dimensions, tandis que le second problème simule la recherche d'un état d'équilibre avec de la mousse en trois puis en deux dimensions, dans une logique qui prolonge quelques considérations sur les nids d'abeille. Notre propos vise à montrer l'effet de la modélisation instrumentée sur les conceptions a priori en considérant la coordination des opérateurs mis en œuvre, des systèmes de représentation employés et des structures de contrôles mobilisées dans l'interaction entre l'élève et le milieu informatique. La question de l'articulation entre les démarches inductives et déductives est abordée, tout comme celle de la représentation d'un phénomène tridimensionnel sur un écran plat. Enfin, des propositions d'aménagement du logiciel seront sollicités dans la mesure où celui-ci contribue à la quête d'un espace de travail géométrique idoine.

ABSTRACT.

MOTS-CLÉS : mots significatifs en lien avec le propos.

KEYWORDS :

Introduction

La notion de modèle en mathématique est probablement aussi ancienne que la science géométrique. Alors que l'on cherchât à représenter toutes sortes de situations, d'objets et de structures du monde réel, les Anciens purent simuler la réalité du monde de l'espace et des formes et ainsi anticiper sur ses propriétés. Mais qui dit modélisation dit aussi simplification, ce qui donne au modèle des caractéristiques qui lui sont propres, en toute indépendance de réalité originelle. C'est-à-dire que la géométrie, dans son interprétation et ses traitements, se comporte comme une nouvelle réalité, à la fois abstraite dans sa logique et concrète dans ses modes de représentation. Et depuis l'avènement des logiciels de géométrie dynamique, le modèle géométrique semble de réinventer, offrant même un espace de simulation au sein du modèle qui devient une autre réalité.

Dans ce qui suit, nous partons des acceptions classiques des processus de représentation de modélisation (section 1) afin de les appliquer à la constitution d'un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnel, le géogébra-3D, pour lequel le développement informatique cherche à rapprocher les modèles géométriques à la réalité de l'institution scolaire (section 2). Nous introduisons ensuite trois notions clefs, issues de la didactique des mathématiques (section 3), de façon à soutenir l'exploration de deux situations d'interaction entre les mathématiques et sa didactique (section 4). Nous terminons sur quelques considérations générales qui visent à projeter le développement logiciel vers l'enseignement-apprentissage des mathématiques à la fin du collège et au début du lycée (section 5).

1. Quelques références théoriques

1.0. Représentation et modélisation : deux processus charnières aux cœur de l'apprentissage de la géométrie

Dans un même contexte géométrique, les notions de représentation et de modélisation peuvent prendre des sens forts différents. Du point de vue de la théorie des signes (perspective sémiotique), le dessin est un modèle de la figure (au sens de représentation sémiotique), cette dernière étant un objet mathématique issu du modèle euclidien (au sens de théorie représentante). Ce double jeu autorise la multiplicité des processus de représentation et de signification du registre figural (Richard, 2004a). C'est-à-dire que si un même objet géométrique peut être représenté par des unités figurales différentes, un même support peut être utilisé pour différents modèles. Ainsi, on peut «voir» qu'un dessin est effectivement un carré à cause de son apparence visuelle (approche synthétique) ou parce que l'on peut en établir la nature par le raisonnement (approche analytique). À l'inverse, qu'il soit dessiné sur papier ou visible par l'activation de pixels à l'écran d'un ordinateur, ce même carré peut en représenter un en géométrie euclidienne ou bien représenter un

cercle en géométrie du chauffeur de taxi (modèle inspiré des travaux de Minkowski (Krause, 1986)).

La distinction entre «matérialisation» et «modèle» de la figure permet notamment de souligner l'autonomie de l'ordre symbolique constitué par le dessin de ce qu'il est censé signifier, en ce sens qu'un dessin géométrique étant lui-même constitué de formes, il peut être son propre modèle, tel un fait donné. Avant d'illustrer dans une situation d'apprentissage les effets producteurs et réducteurs dans la représentation figurale, nous introduisons la modélisation du point de vue de la formation des sciences (perspective épistémologique). Selon Delahaye (2008), lorsqu'on utilise les mathématiques pour modéliser le monde ou certains de ses aspects particuliers :

Le mot «modèle» est alors pris dans le sens de représentation : les objets mathématiques jouent le rôle des objets réels, et de leur connaissance on espère tirer une compréhension du monde réel lui-même. Lorsque la modélisation est correcte, l'étude du modèle mathématique donne des informations sur la situation, l'objet ou les structures que vise le modèle. Ces informations peuvent provenir de l'étude mathématique du modèle, ou bien de son utilisation pour mettre au point des programmes informatiques qui, lorsqu'ils fonctionnent, simulent la situation, l'objet ou la structure modélisée. On peut ainsi modéliser le monde physique par un espace euclidien de dimension trois (ou quatre pour prendre en compte le temps) ; on peut ensuite modéliser un satellite tournant autour de la Terre par un point dont les coordonnées varient continûment en fonction du temps, etc.

La superposition des deux jeux de la représentation a beau être cohérente, son effet dans une situation de modélisation peut aussi bien aller dans une direction comme dans une autre. Par exemple, à un groupe d'étudiants de 1^{re} année en formation des maîtres, on a posé le problème intitulé *La chèvre et la corde* sous la forme présentée à la figure 1a. La question tout en bas demande de modéliser une situation suivant ses deux acceptions (traduction du catalan «faire une étude» et «faire un dessin») dont le contexte paraît s'ancrer dans la réalité tridimensionnelle. Néanmoins, au lieu de proposer une image de celle-ci, l'énoncé offre plutôt un dessin aux allures géométriques qui complète une brève description verbale.

Par équipe de deux, les étudiants ont retourné deux types de solution, soit douze fois le modèle A (figure 1b) et onze fois le modèle B (figure 1c). Il est facile de condamner en partant le modèle B, d'autant plus que le modèle A colle à l'intention initiale de la question et que le dessin montre un refuge «solide», suggéré par l'ombrage intérieur, au contour visiblement carré. Si pour certains, le dessin agit essentiellement comme un fait, voir une sorte de réalité prémodélisée (modèle A), pour d'autres l'absence de la réalité semble être au cœur de leur approche (modèle B). Par exemple, au cours de la résolution, on nous a demandé si le refuge avait des murs ou quelle en était la hauteur, et même s'il pouvait y avoir du fourrage à l'intérieur de l'enceinte. À notre avis, ce type de questionnement est nécessaire dans une démarche de modélisation, sous peine de travailler déjà à partir d'une réalité modélisée (Richard, 2010a et b). De plus, pour ceux qui connaissent bien la montagne, il faudrait avoir de l'information sur la morphologie du terrain, les obstacles possibles ou la forme même du refuge. D'ailleurs, la figure 1d est une des premières images de refuge que nous a retourné le moteur de recherche Google.

L'herbe sur son toit et sa forme organique nous rappellent la difficulté de modéliser géométriquement une réalité physique et combien la représentation dans le plan d'une réalité tridimensionnelle peut engendrer des modèles différents en classe.

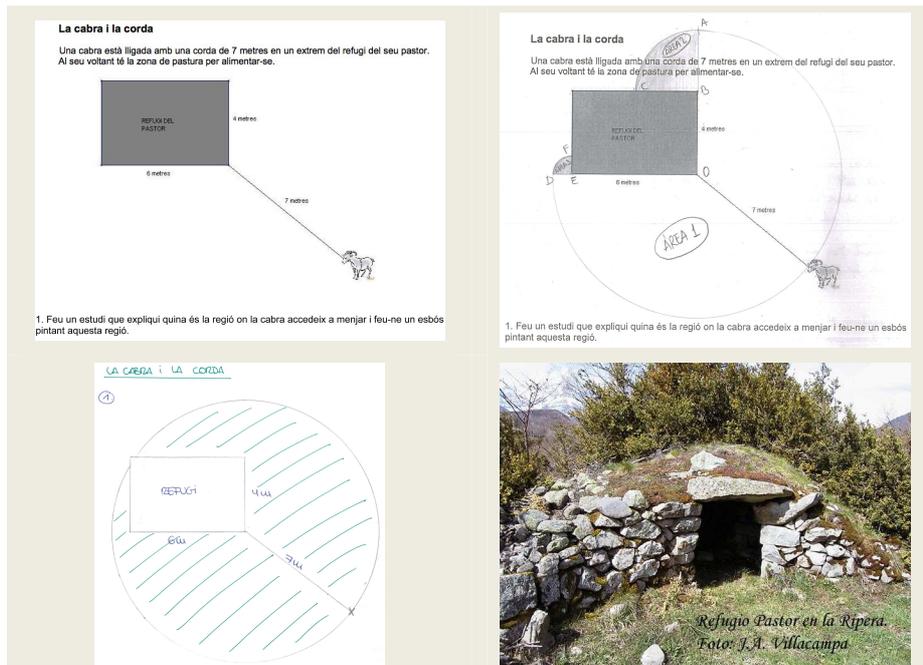


Figure 1.a, b, c et d. Énoncé de la situation, modèle A, modèle B et un vrai refuge. Des images agrandies et la traduction du texte se trouvent en annexe.

1.1. Géogébra 3D : un outil en évolution

Le développement de géogébra 3D en tant que logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle s'inscrit dans la foulée du gratuiciel libre géogebra (GGB). En bout de piste, il s'intégrera à la version 5.0 du logiciel source¹, ce qui permettra en toute transparence la mise en œuvre de situations géométriques qui intègrent simultanément la représentation figurale dans le plan, la modélisation numérique d'objets géométriques en déplacement (fenêtres «algèbre» et «tableur»), le calcul formel et la représentation dynamique dans l'espace, dont l'opportunité de montrer des coupes transversales. Dans notre propos, nous n'entrons pas en amont dans la subtilité des modèles mathématiques nécessaires à l'exercice de programmation informatique ni dans celle des modèles discrets de la représentation d'objets géométriques à l'interface de l'ordinateur. Nous restons en aval pour constater l'effet du logiciel lorsqu'il est en interaction avec un individu, que ce soit en vue de

¹ Pour connaître l'état actuel, voir <<http://www.geogebra.org/trac/wiki/GeoGebra3D>>.

situations didactiques ou d'activité de résolution de problème. En revanche, cette interaction présumée dans un contexte scolaire est à l'origine des choix informatiques pour le perfectionnement de géogébra 3D, ce qui veut dire que nous solidarisons les modèles précédents par un modèle d'apprentissage de la géométrie.

1.2. Les interactions apriori entre l'élève et le milieu

Si les connaissances mathématiques ne sont pas innées, l'élève possède tout au moins une capacité à analyser, à raisonner et à communiquer des idées qui se rapportent fondamentalement à la culture mathématique (PISA, 2006), qu'il s'agisse au regard de la quantité, l'incertitude, les variations et les relations, ou l'espace et les formes. Cependant, l'élève a été engagé très tôt dans sa scolarité à poser, formuler ou résoudre des problèmes au sein de modèles mathématiques pour lesquels il a dû en interpréter les solutions. Que ce soit en réponse à une intention d'enseignement ou un questionnement personnel, c'est donc en interaction avec un milieu porteur de connaissances mathématiques que l'élève a pu animer les siennes.

Dans ce qui suit, nous utilisons la notion de milieu en tant que concept unificateur de l'ensemble des supports qui véhiculent des connaissances mathématiques lorsque ceux-ci sont en interaction avec un élève, que ce soit des systèmes de signes, des outils, des mises en scène ou tout autre matériel à usage didactique, depuis les documents papiers jusqu'aux médias électroniques. En outre, nous y introduisons la contribution intellectuelle de collaborateurs ou de situations (avec personnages) dont l'intention fondamentale n'est pas l'enseignement de contenu ou de méthodes mathématiques, en autant que ce soit en réaction aux propositions de l'élève dans une perspective d'apprentissage. Ainsi, le milieu se constitue de composantes matérielles et intellectuelles et il en considère les apports cognitifs providentiels, comme regarder la réponse dans un solutionnaire, consulter une piste de solution proposée, invoquer un oracle en géométrie dynamique ou une fonction en calcul symbolique (milieu matériel); ou l'apport d'arguments d'un compagnon collaborateur ou du maître qui cherche à relancer, sous une forme ou une autre, un processus de résolution bloqué (milieu intellectuel). De plus, au cours d'une question lancée par un élève, le reste de la classe considéré comme un tout fait partie notamment du milieu intellectuel par rapport à cet élève. Dans la perspective d'un milieu à la fois matériel et intellectuel, l'interaction élève-milieu se considère alors hors des situations proprement didactiques (Brousseau, 1998) et c'est l'élève qui souhaite faire évoluer la connaissance de son propre mouvement.

Si les connaissances mathématiques opératoires émergent de l'interaction entre l'élève et le milieu, la littérature didactique en offre un double éclairage sur ces interactions (figure 2). Lorsque c'est l'élève qu'on regarde au premier plan, la notion de conception (Balacheff et Margolinas, 2005) permet de rendre compte d'une instance de la connaissance de l'élève, qui se distingue par la représentation et les traitements qu'elle met en œuvre et les contrôles qu'elle mobilise, et dont la portée est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier. En résumant la conception C par l'égalité $C = (P, R, L, \Sigma)$, ces auteurs caractérisent C par un

ensemble définitoire de problèmes (P) pour lesquels elle apporte des outils de résolution (R) en s'appuyant sur des systèmes de représentation (L) et une structure de contrôle (Σ) qui permet jugements et décisions. Autrement dit, lorsque s'exerce la conception C durant la résolution d'un problème P suivant un raisonnement traditionnel ou à l'interface d'un logiciel, R est l'expression du raisonnement, rendu avec le type de langage L et issu du type de rationalité Σ .

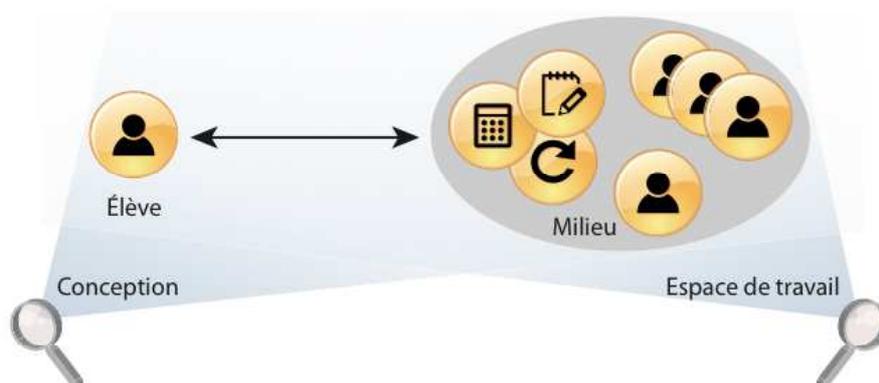


Figure 2. Deux éclairages du système élève-milieu

Par ailleurs, lorsque c'est le milieu que l'on regarde au premier plan, la notion d'espace de travail mathématique (Kuzniak, 2009) permet de rendre compte de l'environnement qui amorce la genèse des connaissances mathématiques à partir d'une articulation entre un référentiel théorique, des objets géométriques et un milieu matériel. Pour cet auteur, l'espace se structure avec la mise en réseau de trois composantes, soit un ensemble d'objets, un ensemble d'artéfacts et un référentiel théorique. Toutefois, afin d'y adjoindre le milieu intellectuel et de considérer conjointement dans cet environnement une démarche de l'élève en instance de réalisation, nous reprenons ici le modèle d'espace de travail géométrique de Coutat et Richard (2011), dont les composantes et les processus sont étayés à la figure 3.

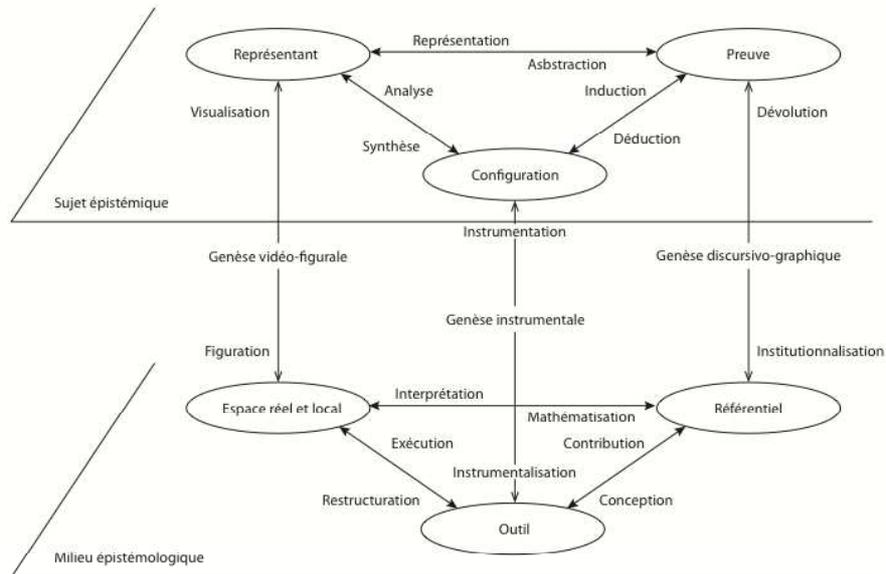


Figure 3. *L'espace de travail géométrique selon Coutat et Richard (2011)*

2. Exemples d'interactions possibles dans le traitement de deux problèmes

2.1. Les jardins de Madrid

Le problème de départ consiste à situer un lampadaire pour éclairer au mieux un jardin public de forme triangulaire. Ce problème conduit à la notion de cercle circonscrit, comme le montre la « vue de dessus » (figure 4a). Nous nous intéressons également à l'insertion effective du lampadaire dans l'espace en trois dimensions (figure 4b).

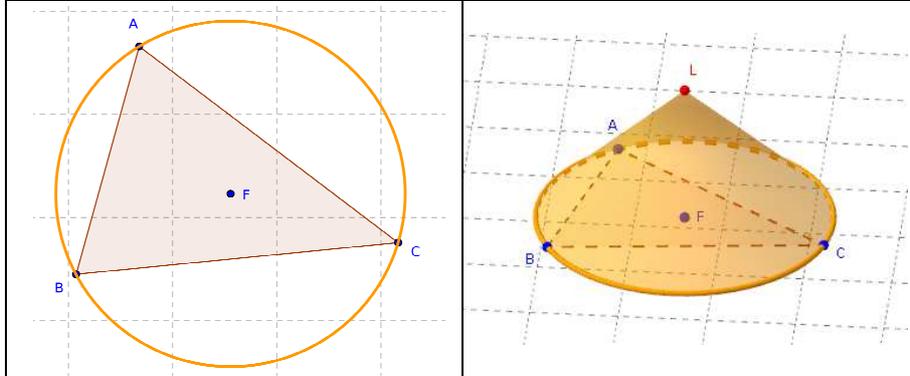


Figure 4.a et b. Jardin public : « vue de dessus » et en trois dimensions

En tenant compte également des immeubles environnants, on obtient une représentation plus riche (figure 5).

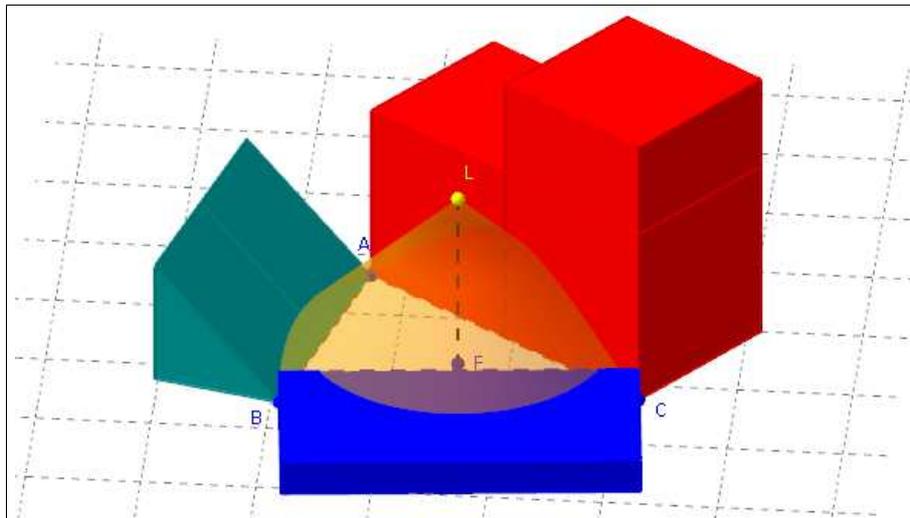


Figure 5. Situation avec immeubles environnants

La lumière projetée sur les façades et les toits crée alors des coniques, notamment des hyperboles, des paraboles et des cercles (figure 6).

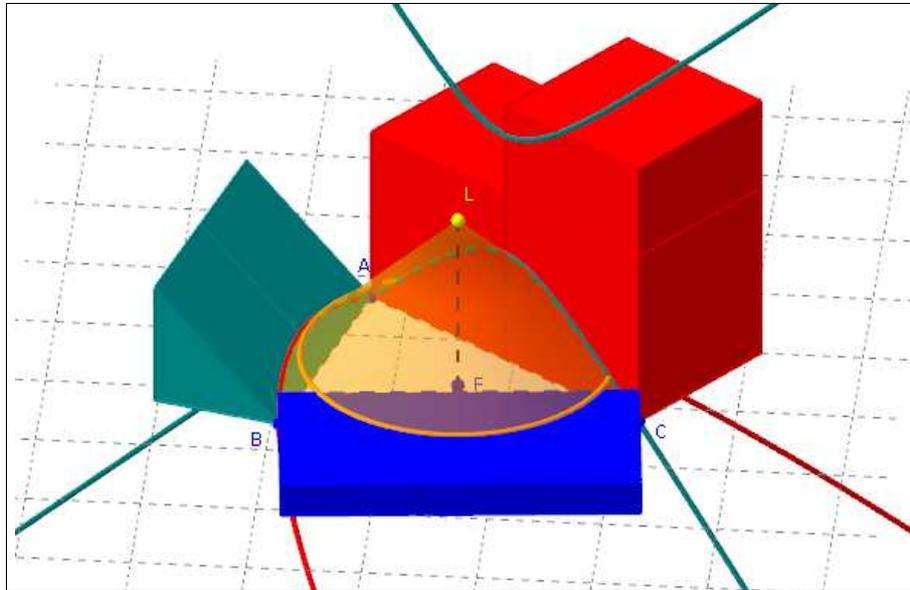


Figure 6. Coniques d'intersection du faisceau lumineux

Nous pouvons étudier ces coniques dans les plans rapportés aux façades, et notamment afficher leurs équations dans des repères bien centrés (figures 7a, b, c, d).

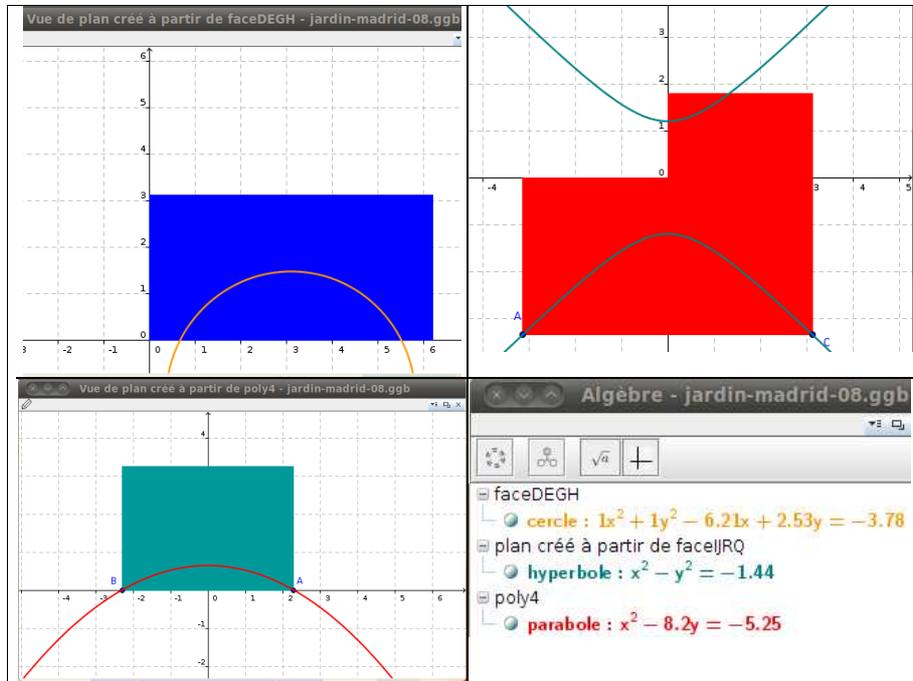


Figure 7.a, b, c, d. Vues de la situation dans les plans des façades éclairées et équation des coniques dans les repères rapportés à ces plans.

2.2. Les abeilles et les bulles

2.2.1. La géométrie du gâteau de cire

Un gâteau de cire présente deux côtés, constitués de « tubes » dont les ouvertures forment un pavage hexagonal. Ces tubes sont les nids au fond desquels les abeilles déposent leurs œufs. L'interface entre ces deux côtés n'est pas plane : chaque tube se termine par trois losanges, comme une moitié de dodécaèdre rhombique (figure 8).

Cette configuration semble non seulement optimiser la quantité de cire utilisée, mais également permettre la meilleure proximité des œufs, et donc réduire les déperditions de chaleur.

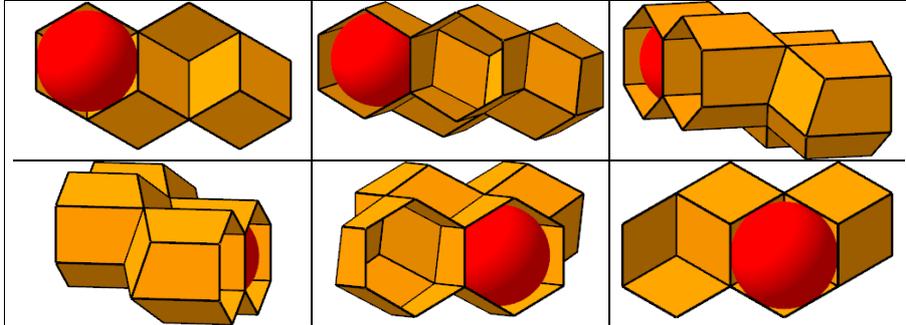


Figure 8. Nids d'abeilles (deux nids et un œuf de chaque côté)

Nous partons donc de cette question : étant donnée une sphère, inscrite en partie dans un prisme droit à base hexagonale régulière, la « fermeture » du prisme en dodécaèdre rhombique est-elle optimale ?

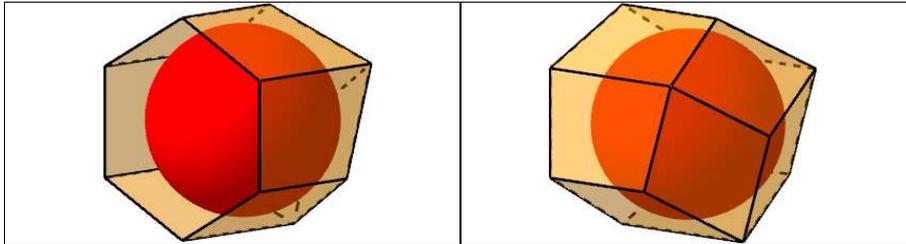


Figure 9. Vues d'un nid d'abeille avec un œuf

2.2.2. Problème 1 : refermer le prisme à l'aide d'une pyramide

Nous avons donc une sphère inscrite en partie dans un prisme droit à base hexagonale (figure 10a). Pour des raisons de commodité, nous avons placé la base du prisme dans le plan xOy . Nous cherchons à refermer le prisme à l'aide d'une pyramide régulière (figure 10b).

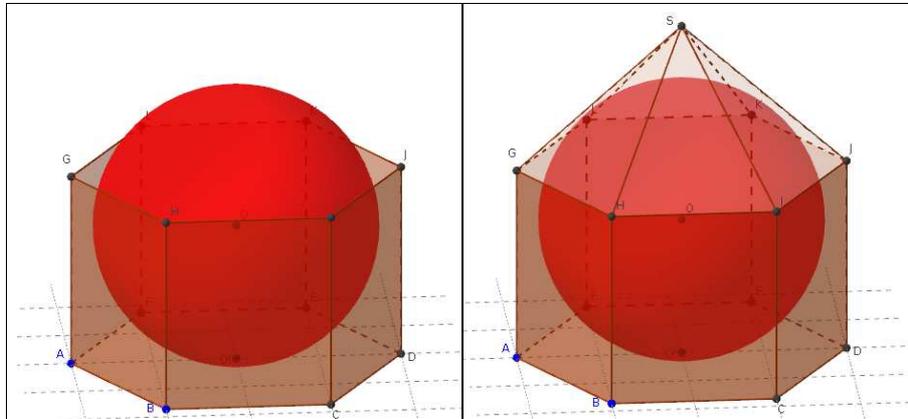


Figure 10.a et b. *Présentation du problème et résolution.*

Une figure approchée permet de conjecturer le lieu du point où une face de la pyramide est tangente à la sphère (figure 11).

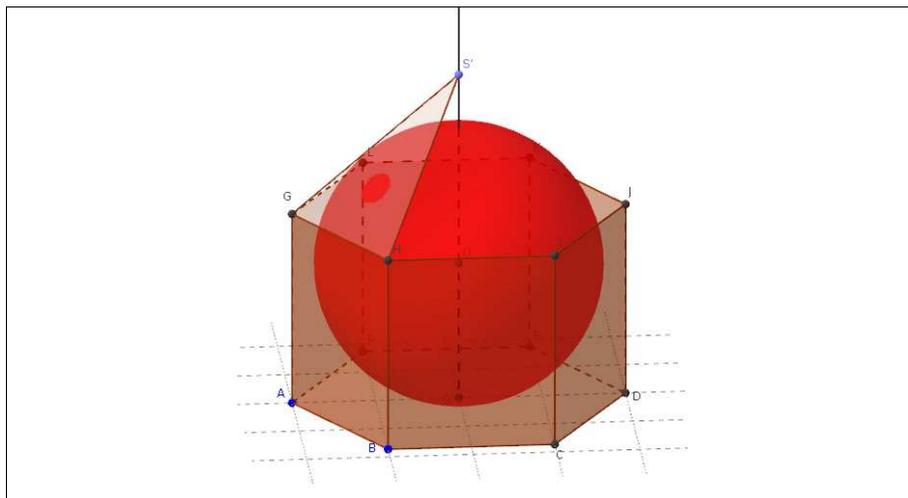


Figure 11. *Résolution approchée : le triangle coupe la sphère selon un cercle centré sur le plan médiateur du segment [GH]*

Tout se passe donc dans le plan médiateur du segment $[GH]$; dans la face GHS de la pyramide, la médiatrice de ce segment est tangente à la sphère, donc au cercle intersection de la sphère et du plan médiateur. Le triangle MPO est rectangle en P , nous en déduisons la construction du sommet S de la pyramide (figure 12a). Nous retrouvons cette construction dans la vue en perspective (figure 12b).

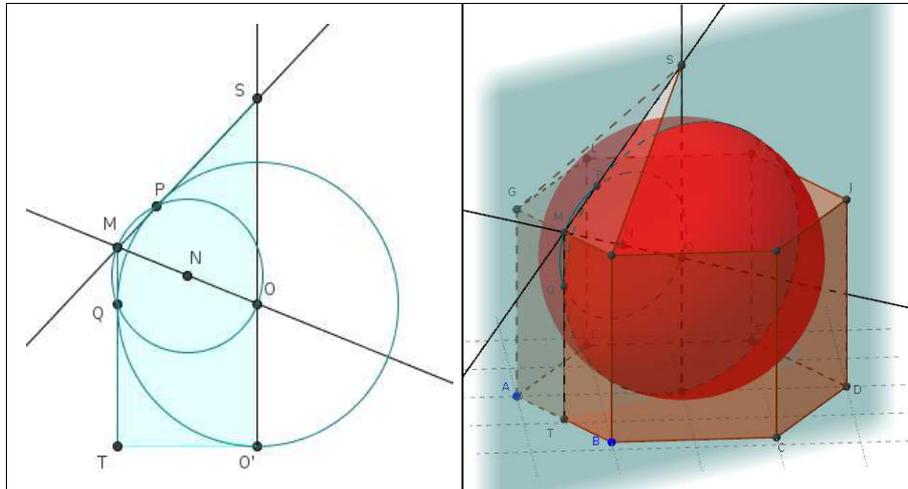


Figure 12.a et b. Construction du point S dans le plan et vue dans l'espace

Ce problème est une première approche de la question du nid d'abeille, la construction demandée est faite à partir d'un existant simple: sphère et prisme ouvert.

Un possible prolongement est la recherche de la surface minimale. Elle se ramène au calcul de la hauteur MS en fonction de la hauteur du prisme ; à l'aide du théorème de Pythagore, nous modélisons les variations par une fraction rationnelle relativement simple à étudier (figure 13).

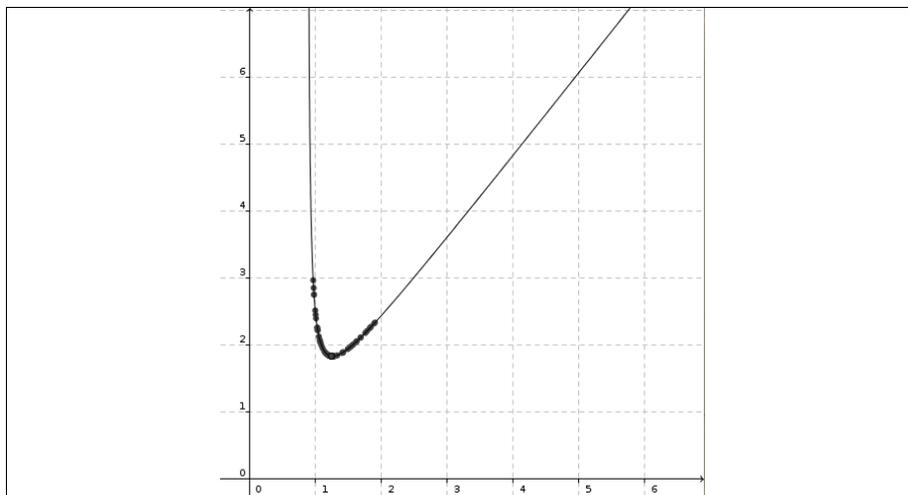


Figure 13. Surface d'une face du prisme ajoutée à la surface d'une face de la pyramide, en fonction de la hauteur du prisme

2.2.3. Problème 2 : refermer en nid d'abeille

La figure cherchée repose sur un postulat de symétrie. Il s'agit donc de construire trois losanges ayant un sommet commun situé dans l'axe de la figure. Les autres sommets sont situés sur les arêtes latérales du prisme ; par symétrie ils sont situés alternativement sur deux plans orthogonaux à l'axe (figure 14a). Il s'agit donc de construire l'un des trois losanges. Dans ces conditions, la position d'un des sommets du losange, par exemple celui situé le plus bas, caractérise la solution proposée (figure 14b).

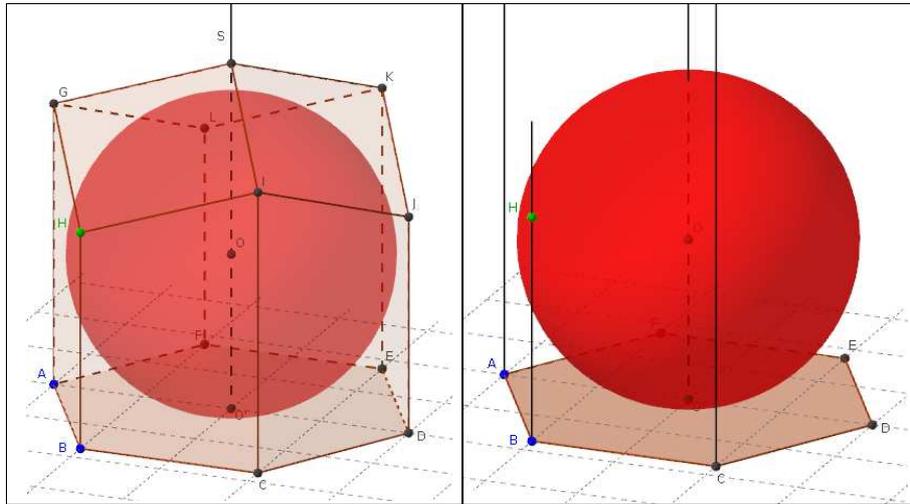


Figure 14.a et b. Fermeture du nid d'abeille : solution et présentation

Nous partons donc ici du point H ; il vient également que le point de tangence P est dans le plan contenant H et l'axe de la figure : dans ce plan, la construction est similaire à celle du problème 1 (figure 15a et b).

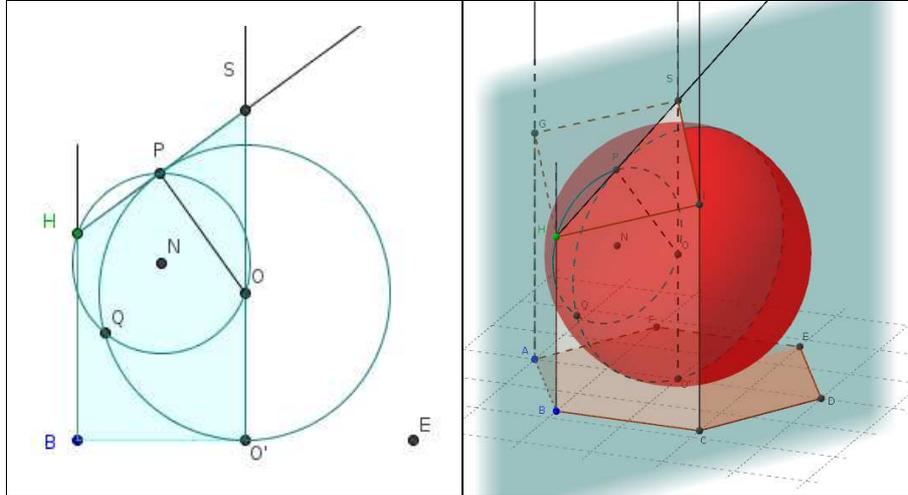


Figure 15.a et b. *Construction dans le plan et vue dans l'espace*

Ce problème peut également se prolonger sur la question de l'optimisation de l'aire. Dans une approche analytique, la fonction est plus difficile à étudier (présence de radicaux) ; il est cependant remarquable que la solution optimale coïncide avec le dodécaèdre rhombique.

2.2.4. Bulles et mousses

Nous nous intéressons ici à la géométrie des bulles d'une mousse homogène très compressée. Dans ces conditions, les bulles prennent la forme de dodécaèdres rhombiques et peuvent ainsi paver l'espace (**référence**) (figure 16).

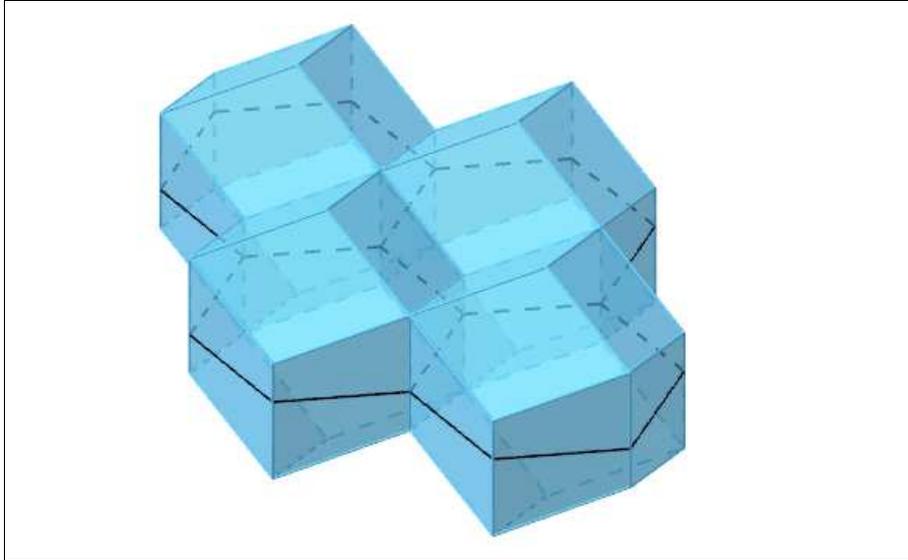


Figure 16. *Quatre bulles ; en noir : section plane formant un pavage hexagonal*

Nous étudions dans un premier temps un plan de coupe sur quatre bulles voisines. Dans un état stable, cette coupe dessine quatre hexagones réguliers (figure 17a). Ces bulles peuvent « rouler » les unes sur les autres, en passant par une phase très instable (figure 17b) qui bascule dans un nouvel équilibre stable (figure 17c).

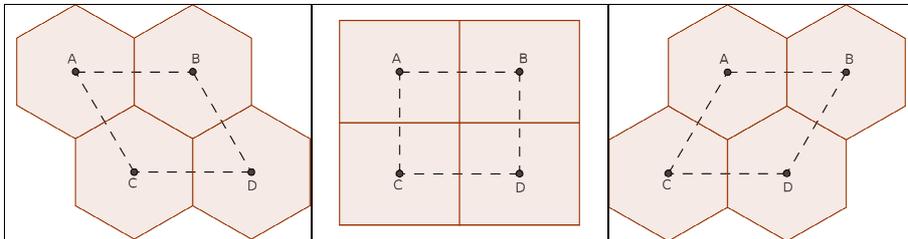


Figure 17.a, b et c. *Glissement des quatre bulles.*

Durant ce glissement, les sections ont une aire constante, et leurs centres forment un parallélogramme $ABDC$ dont la base $[CD]$ et la hauteur correspondante sont de mesures constantes.

Nous cherchons à retrouver la forme des sections dans toutes les phases intermédiaires ; les constructions ci-après sont situées entre la phase initiale et la phase instable ; nous n'étudions que la bulle de centre D , les autres s'en déduisant par translation.

Lors de la transition, l'interface entre les bulles C et B disparaît : les côtés situés en haut à droite de chaque hexagone vont donc disparaître. Ci-après (figure 18a) une représentation des trois phases: initiale (en vert), intermédiaire (en noir) et instable (en rouge).

Le sommet M_t transite donc du sommet M au sommet M' . Nous avons choisi de le placer de la manière la plus simple, en le définissant comme barycentre de ces deux points (figure 18a). Dans ces conditions, l'aire de l'hexagone n'est pas conservée, car le triangle M_tNP est plus petit que le triangle MNP (figure 18b).

Nous construisons le point M'_t de sorte que les droites (M'_tM_t) et (NP) soient perpendiculaires, et que les triangles NMP et NM'_tP aient la même hauteur. Ces deux triangles ont donc la même aire (figure 18c).

Il suffit maintenant de construire les triangles NN_tM_t et M_tP_tP , respectivement de même hauteur que les triangles NM'_tM_t et $M_tM'_tP$, et en plaçant les points N_t et P_t respectivement sur les droites (NQ) et (PR) (figure 18d). Les points N_t et P_t fournissent alors la transition des sommets N et P de l'hexagone. Les trois sommets manquants se déduisent par symétrie de centre D .

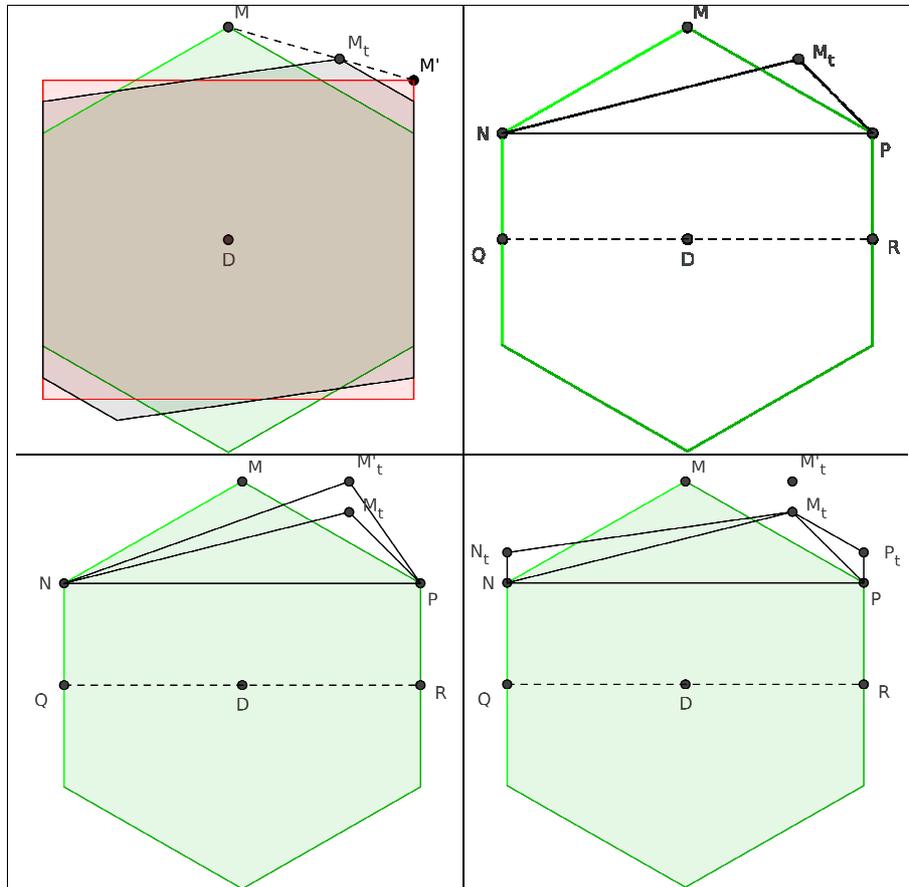


Figure 18.a, b, c, d. Transitions de la bulle de centre D et construction des points de transition

Nous obtenons ainsi les transitions suivantes (figure 19).

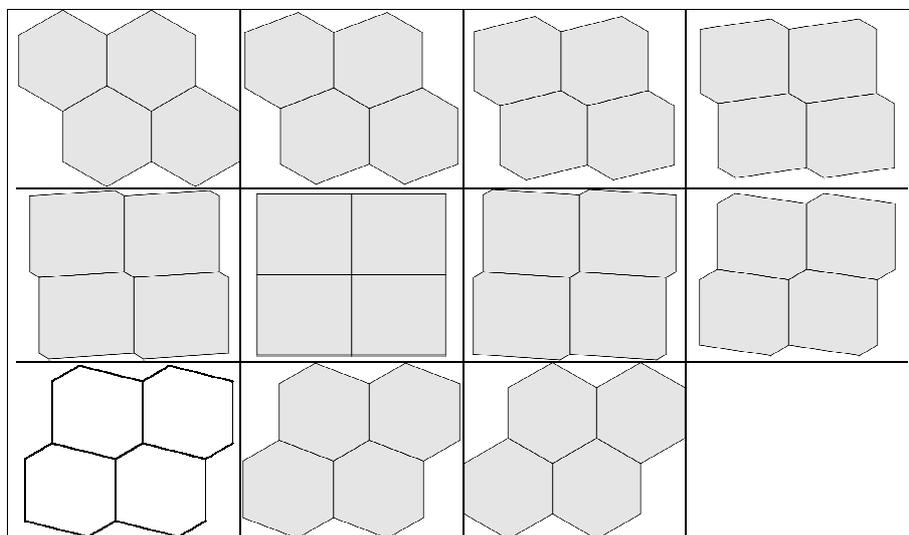


Figure 19. Phases de transition des quatre bulles entre deux états stables

Nous pouvons appliquer la première moitié de cette transition au réseau tridimensionnel présenté en introduction (figure 20).

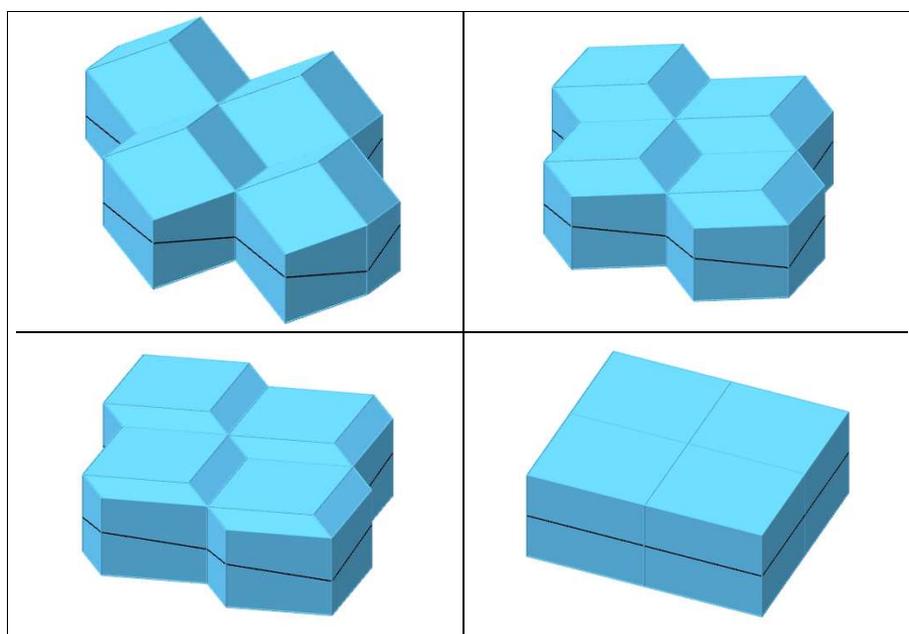


Figure 20. Transitions sur le réseau tridimensionnel

Il reste à déterminer le déplacement des bulles situées sur le plan supérieur par exemple ; ce déplacement induit également la suite de la déformation jusqu'à la phase stable finale.

Conclusion

(...)

Bibliographie

- Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Ckç, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier, & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Coutat, S. & Richard, P.R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 1-30.
- Delahaye, J.P. (2008). Modélisation, mathématique. Article de l'Encyclopædia Universalis France.
- Graner, F. (2003). *Physique de la vie quotidienne*. Berlin et Heidelberg: Springer-Verlag.
- Hales, T. (2001). The Honeycomb Conjecture. *Discrete & Computational Geometry*, 25, 1-22.
- Krause, E.F. (1986). *Taxicab Geometry : An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. Mineola, New York : Dover Publications.
- Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. Dans Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni & Vivier (Éds) *Premier Colloque Franco-Chypriote de Didactique des Mathématiques*, 71-89.
- Ligier-Bélaïr, G. (2006). *Effervescence, la science du champagne*. Paris: Éditions Odile Jacob.
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.
- PISA (2006). *Cadre d'évaluation de PISA 2006. Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*. Les publications de l'OCDE.
- Richard, P.R. (2010a). La geometría dinámica como herramienta para desarrollar competencias de modelización en el bachillerato. (2010b). La evaluación de competencias matemáticas: una apuesta de aprendizaje desde la elección de situaciones-problemas. *Competencias matemáticas. Instrumentos para las ciencias sociales y naturales*, 89-115 et 180-198. Ministerio de Educación et Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa.

Richard, P.R. (2006). Quand les abeilles font de la géométrie. In Pallascio, R. et Doddridge, É. (Dir.) *Montrez cette mathématique que je ne saurais voir!*, 57-63. Montréal: Les Éditions nouvelles.

Richard, P.R. (2004a). L'inférence figurale: Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 229-263.

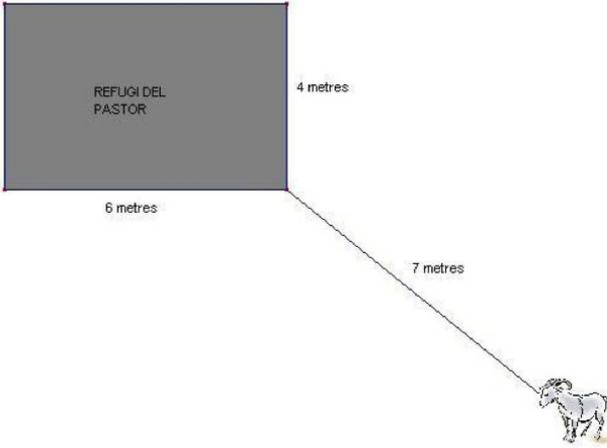
Richard, P.R. (2004b). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berne: Peter Lang.

Annexe

Voici la reproduction agrandie et la traduction des figures 1a à 1d.

La cabra i la corda

Una cabra està lligada amb una corda de 7 metres en un extrem del refugi del seu pastor. Al seu voltant té la zona de pastura per alimentar-se.



The diagram shows a rectangular area labeled 'REFUGI DEL PASTOR'. The bottom side is labeled '6 metres' and the right side is labeled '4 metres'. A line representing a rope of length '7 metres' extends from the top-right corner of the rectangle to a small illustration of a goat.

1. Feu un estudi que expliqui quina és la regió on la cabra accedeix a menjar i feu-ne un esbós pintant aquesta regió.

Figure 1a. Énoncé de la situation.

La chèvre et la corde

Une chèvre est attachée avec une corde de 7 mètres au bout du refuge de son berger.

Tout autour il y a une aire de pâturage pour se nourrir.

[Figure : refuge du berger; 4 mètres; 6 mètres; 7 mètres]

1. Faites une étude qui explique quelle est la région où la chèvre peut manger et indiquer à l'aide d'une esquisse où se trouve cette région.

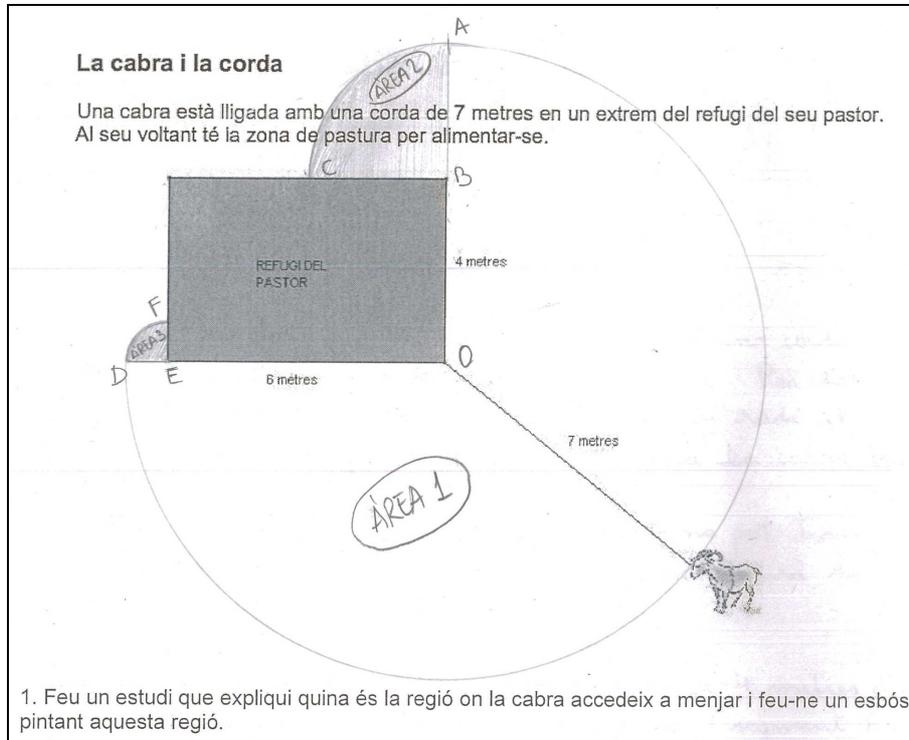


Figure 1b. Modèl A.

[Dessin: aire 3; aire 2 et aire 1]

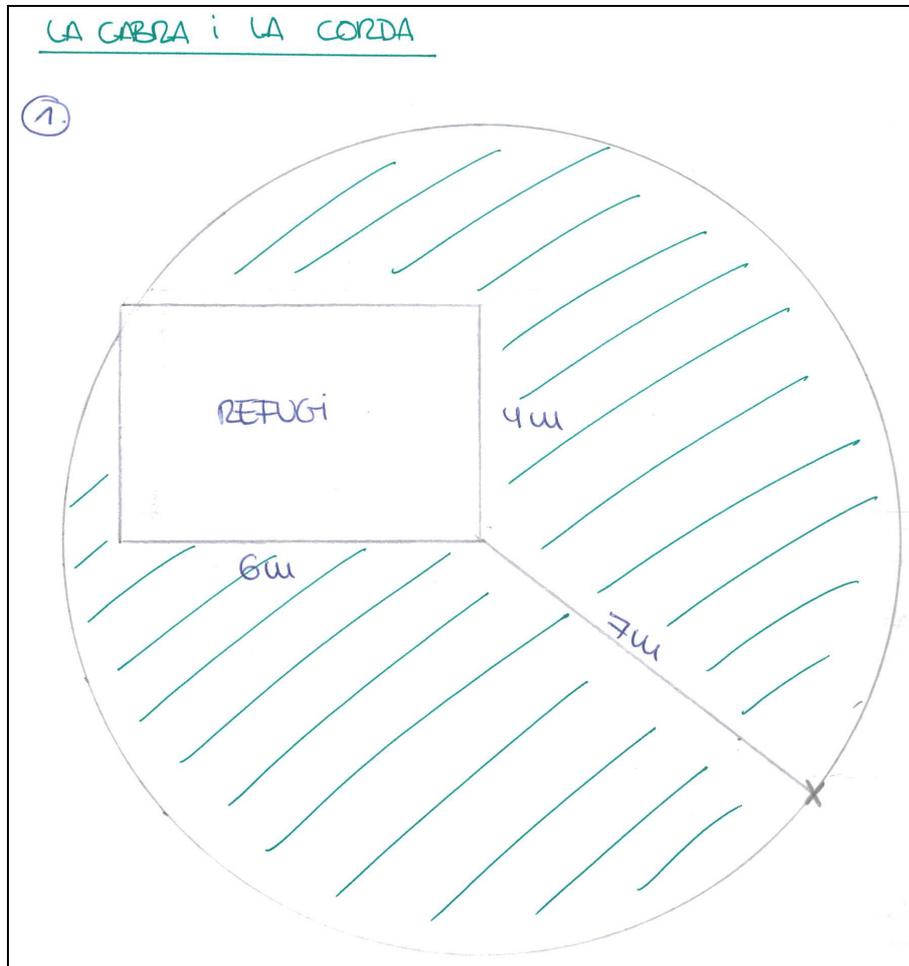


Figure 1c. Modèle B.

La chèvre et la corde.

[Dessin: refuge; 6 m; 4 m; 7 m]

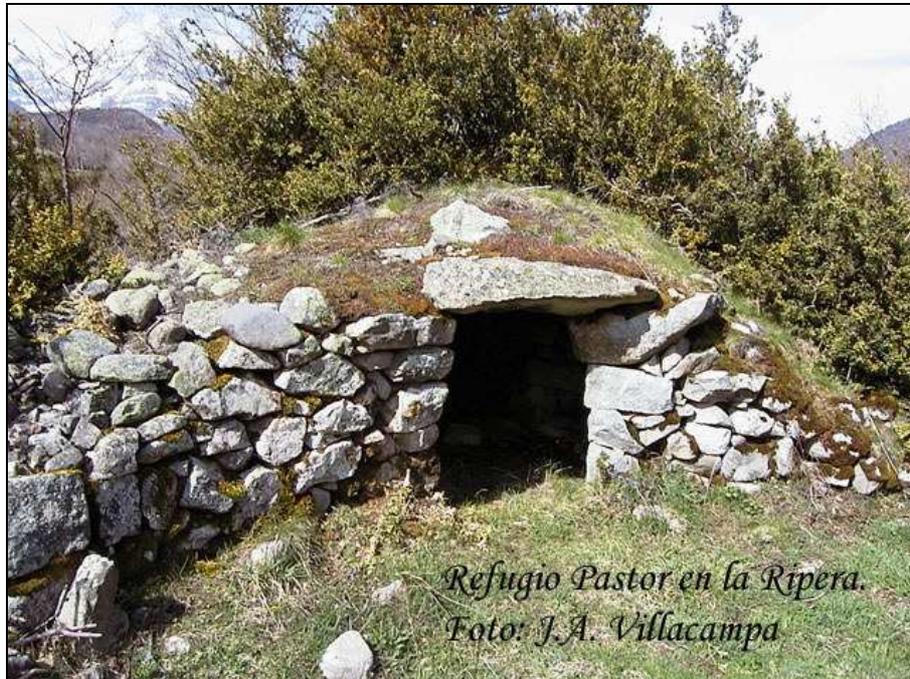


Figure 1d. Un vrai refuge.

Source : <http://www.isaro.com/FotosValleTena/pagina/Refugio%20en%20La%20Ripera.htm>

Refuge du Berger à La Ripera